Marc Rochel

Die Kegelschnitte und ihre Eigenschaften

Facharbeit in Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Gliederung	Beschreibung	Seite
1	**Einleitung**	**3**
1.1	Problemstellung	3
1.2	Abgrenzung des Themas	4
2	**Ausführung**	**5**
2.1	Herleitung der Vektorgleichung des Doppelkegels	5
2.2	Herleitung der Scheitelgleichung der Kegelschnitte	7
2.3	Arten der Kegelschnitte	11
2.3.1	**Gleichung des Kreises und der Parabel in der Scheitelform**	**12**
2.3.1.1	Vorüberlegungen	12
2.3.1.1.1	Herleitung der Scheitelform der Kreisgleichung	12
2.3.1.2	Die Schnitte	14
2.3.1.2.1	Der Kreis	14
2.3.1.2.2	Die Parabel	15
2.3.2	**Gleichung der Ellipse, Hyperbel und des Kreises in der Mittelpunktsform**	**15**
2.3.2.1	Vorüberlegungen	15
2.3.2.1.1	Herleitung der Mittelpunktsform der Ellipsengleichung	15
2.3.2.1.2	Herleitung der Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung	17
2.3.2.1.3	Herleitung der Mittelpunktsform der Kreisgleichung	20
2.3.2.2	Die Schnitte	20
2.3.2.2.1	Die Ellipse	21
2.3.2.2.2	Die Hyperbel	22
2.3.2.2.3	Der Kreis	22
2.3.2.3	Anmerkung bezüglich der numerischen Exzentrität ε	23
2.3.3	**Allgemeine Gleichung**	**24**
3	**Aufgabenstellung**	**26**
3.1	Lösung zu Aufgabe 1	26
3.2	Lösung zu Aufgabe 2	29
4	**Literaturverzeichnis**	**31**

1 Einleitung

Am 22. Juli 1995 entdeckten Alan Hale und Thomas Bopp im Südwesten der USA den momentan wohl bekanntesten Kometen, der auch nach ihnen benannt wurde: Hale Bopp. Die Zeitspanne vom 1. Dezember bis zum 5. Mai 1997 war wohl die interessanteste. Hale Bopp war mit bloßem Auge sichtbar. Doch wie konnten diese Daten vorausberechnet werden?

Um dies und andere Prognosen vorauszusagen, benötigt man die Flugbahn des Kometen. Eine wesentliche Erkenntnis ist, daß die Himmelskörper im Weltall stets Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln beschreiben - also die Kegelschnitte. Durch sie ist berechenbar, an welchem Ort sich Kometen oder andere Himmelskörper zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft befinden werden.

Schnittprobleme sind ein essentieller Bestandteil der analytischen Geometrie. In der gesamten Schullaufbahn sind Schnitte ein wichtiger Punkt des Unterrichtsstoffes: Schnitte zwischen Ebenen, zwischen Geraden, etc. Die Differentialrechnung wäre ohne Nullstellenberechnung, einem Schnitt zwischen Funktionsgraph und x-Achse, undenkbar.

Schnittprobleme sind auch in der Algebra vorhanden, betrachtet man die Gleichungen eines Gleichungssystems als einzelne Funktionen. Das Lösen eines Gleichungssystems entspricht dem Suchen von Schnittpunkten der Funktionsgraphen dieser Funktionen.

1.1 Problemstellung

In dieser Facharbeit beschäftige ich mich mit den Kegelschnitten und ihren Eigenschaften. Ich schneide einen Kegel mit einer Ebene und betrachte die Schnittfiguren in Abhängigkeit der Form und Lage des Kegels und der Lage der Ebene.

Weiterhin beschäftige ich mich mit der Lösung von zwei Aufgaben, die sich auf dieses Thema beziehen.

Ich habe die Facharbeit so verfaßt, daß sie für Schüler eines Mathematikleistungskurses der Jahrgangsstufe 12 verständlich ist. Den bis dahin lehrplangemäß behandelten Unterrichtsstoff setze ich voraus. Meine Aussagen beweise ich auf der Grundlage dieser Voraussetzungen.

1.2 Abgrenzung des Themas

Es gibt in der Mathematik - wie auch in vielen anderen Wissenschaften - kein Thema, das eigenständig, für sich abgeschlossen eine Einheit bildet. Alle Themengebiete des Unterrichts stehen im Zusammenhang miteinander. Zum Beispiel wird die Differentialrechnung als eigenständiger Block behandelt, sie ist jedoch auch für bestimmte Abstandsproblematiken wichtig, oder sogar fächerübergreifend in der Physik notwendig.

So verhält es sich auch mit meinem Thema, den Kegelschnitten. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, versuche ich, einen kleinen Teil der Mathematik abzugrenzen.

Somit begnüge ich mich mit dem Schnitt zwischen Kegel und Ebene. Weiterhin behandele ich nicht die Sonderfälle der Kegelschnitte: des Punktes (Die Ebene hat nur den Scheitelpunkt des Kegels mit dem Kegel gemeinsam.) und der Geraden (Die Ebene und der Kegel haben den Scheitelpunkt des Kegels als gemeinsamen Punkt.)

In Aufgabe 2 beschränke ich mich auf eine kurze Konstruktionsbeschreibung, da die Aufgabe für einen anderen Weg zur Betrachtung der Kegelschnitte ausgelegt ist.

Diese Abgrenzungen sind mit dem Fachlehrer abgesprochen und genehmigt.

2 Ausführung

2.1 Herleitung der Vektorgleichung des Doppelkegels

Gesucht ist eine Aussage, die für alle Punkte eines bestimmten Doppelkegelmantels den Wert wahr annimmt.

S sei der Schnittpunkt zweier Geraden a und b, die nicht senkrecht zueinander sind und auch nicht aufeinander liegen. ω sei der betragsmäßig kleinere der beiden Schnittwinkel. Durch Rotation der Geraden a um die Gerade b entsteht der Doppelkegelmantel. b bezeichnen wir als die Kegelachse. Die Kegelachse sei durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ festgelegt.

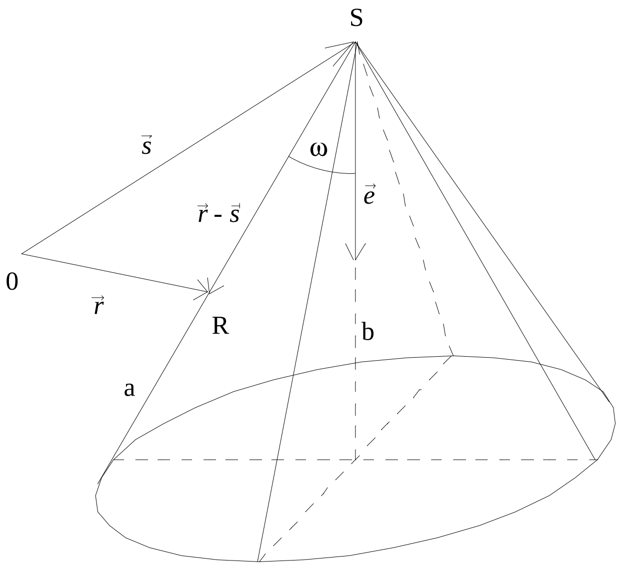

Abb. 1

Über einen beliebigen Punkt R des Kegelmantels läßt sich, mit Hilfe der Definition des Skalarproduktes aussagen:

(1) $$(\vec{r}-\vec{s}) \circ \vec{e} = |\vec{r}-\vec{s}| \cdot |\vec{e}| \cos\omega$$

Da $\vec{e}$ der Einheitsvektor ist, ist sein Betrag gleich 1. Nach Vereinbarung ist

(2) $$c = \cos\omega$$

Daraus ergibt sich

(3) $$(\vec{r}-\vec{s})\circ\vec{e}=|\vec{r}-\vec{s}|\cdot c$$

Dies ist bereits die Vektorgleichung für einen einseitigen Kegel. Um von einem beliebigen Kegel seinen Gegenkegel zu finden, der beide zusammen ihr Doppelkegel ist, multipliziert man den Einheitsvektor $\vec{e}$ mit -1. Verbindet man die Aussagen der beiden Kegel mit einem logischen Oder, erhält man eine Aussage, die für alle Punkte des Doppelkegels wahr ist:

(4) $$\left((\vec{r}-\vec{s})\circ\vec{e}=|\vec{r}-\vec{s}|\cdot c\right)\vee\left(-(\vec{r}-\vec{s})\circ\vec{e}=|\vec{r}-\vec{s}|\cdot c\right)$$

Durch Setzen von Betragstrichen um den Term auf der linken Seite der Gleichungen oder durch quadrieren der Gleichungen fällt das logische Oder weg. Daraus folgt

Gleichung des Doppelkegels in der allgemeinen Form:

(5) $$(\vec{r}\circ\vec{e}-\vec{s}\circ\vec{e})^2=(\vec{r}-\vec{s})^2\cdot c^2$$

Für den Spezialfall, daß S im Ursprung liegt gilt:

Gleichung des Doppelkegels in der Ursprungsform:

(6) $$(\vec{r}\circ\vec{e})^2=\vec{r}^{\,2}\cdot c^2$$

Da ω der betragsmäßig kleinere der beiden Schnittwinkel ist, gilt

(7) $$0<|\omega|<\frac{\pi}{2}$$

Da dies die Voraussetzung ist, gelten (5) und (6) auch nur unter der Bedingung:

(8) $$0<c^2<1$$

Im folgenden bezeichne ich den Doppelkegel zur Vereinfachung auch als Kegel.

2.2 Herleitung der Scheitelgleichung der Kegelschnitte

Zur Vereinfachung der Rechnungen, treffe ich folgende Voraussetzungen:

1. Die Kegelachse liegt in der xz-Ebene.
2. Die xy-Ebene sei die Schnittebene E
3. Der Ursprung sei der Schnittpunkt des Kegels mit der x-Achse, der zu der Kegelspitze S den kürzesten Abstand besitzt. Der positive Teil der x-Achse sei der Teil, in dem die Kegelachse die x-Achse schneidet. Sind die Abstände gleich groß, sei der Ursprung ein beliebiger Schnittpunkt des Kegels mit der x-Achse. Der positive Teil der x-Achse kann ebenfalls beliebig gewählt werden.

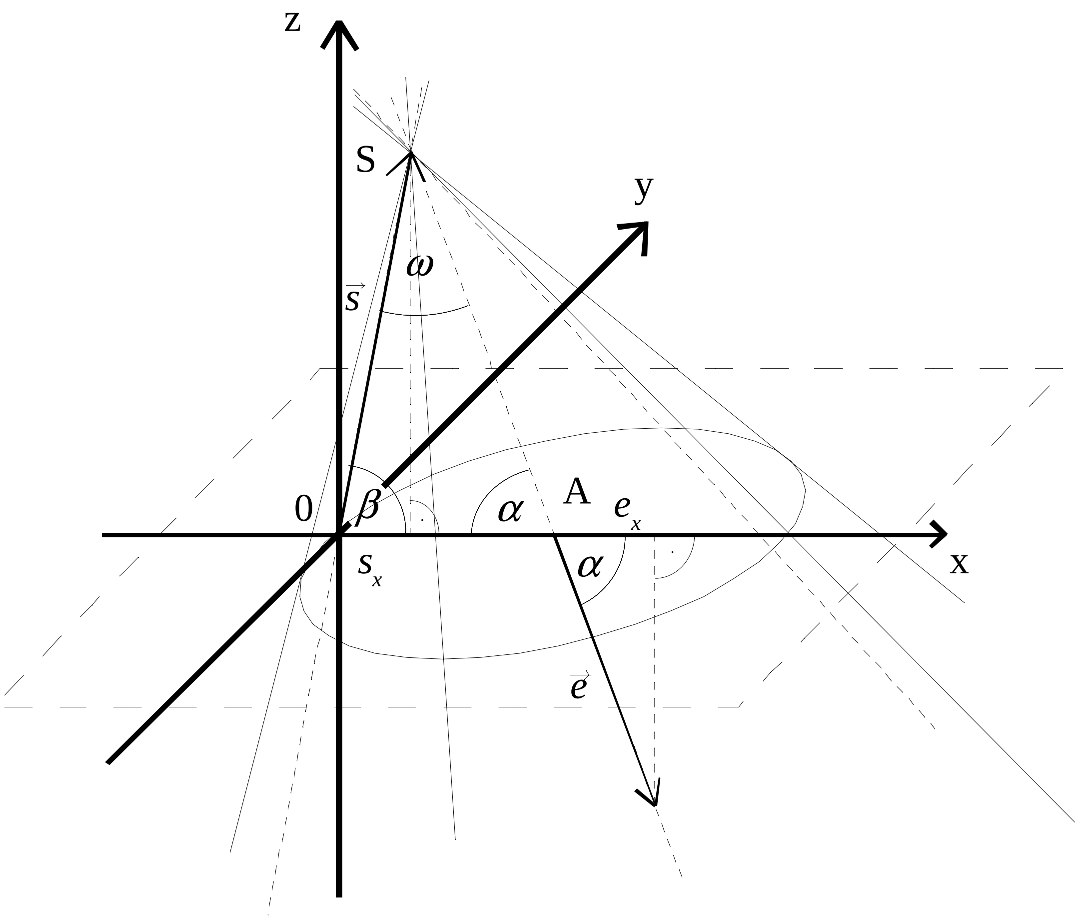

Abb. 2

Man beachte, daß der Punkt A nicht Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Schnittpunkten des Kegels mit der x-Achse sein muß.

Diese Vereinfachungen darf ich treffen, da jeder Kegel und eine zugehörige Schnittebene in diese Position durch Verschiebung und Drehung gebracht werden kann. Der Ansatz wäre: Man sucht denjenigen Schnittpunkt R der Schnittebene E mit dem Kegel, der den kürzesten Abstand zur Kegelspitze S hat. Der Kegel und die Schnittebene wird um $-\vec{r}$ verschoben. Es werden zwei Spannvektoren der Schnittebene E gebildet, $\vec{a}$ ist der Ortsvektor des Schnittpunktes der Kegelachse mit der Schnittebene E, $\vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$. Kegel und Schnittebene werden nun so gedreht, daß $\vec{a}$ linear abhängig zum Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ linear abhängig zum Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ist. Dann erfüllen dieser Kegel und die Schnittebene die obigen Voraussetzungen (1. bis 3.), und die Form des Kegelschnittes ändert sich nicht.

Aus 3. folgt, daß $\alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Aus den Voraussetzungen folgt, daß der Kegel zur xz-Ebene symetrisch ist. Folglich ist der Kegelschnitt zur x-Achse symetrisch, und wir nennen den Ursprung Scheitelpunkt des Kegelschnitts.

Außerdem gilt

(9) $$\vec{s} = \begin{pmatrix}s_x\\0\\s_z\end{pmatrix},\ \vec{e} = \begin{pmatrix}e_x\\0\\e_z\end{pmatrix}$$

Da

$$\vec{s} \circ \vec{e} = |\vec{s}| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\pi - \omega) = -|\vec{s}| \cdot \cos\omega$$

ist

(10) $$\vec{s} \circ \vec{e} = -|\vec{s}| \cdot c$$

Durch Umformung der allgemeinen Kegelgleichung (5) ergibt sich:

$$(\vec{r}\circ\vec{e}-\vec{s}\circ\vec{e})^2=(\vec{r}-\vec{s})^2\cdot c^2$$

$$(\vec{r}\circ\vec{e})^2-2(\vec{r}\circ\vec{e})(\vec{s}\circ\vec{e})+(\vec{s}\circ\vec{e})^2=c^2\vec{r}^{\,2}-2c^2(\vec{r}\circ\vec{s})+c^2\vec{s}^{\,2}$$

wegen (10) ist

(11) $$(\vec{r}\circ\vec{e})^2+2c\cdot|\vec{s}|\cdot(\vec{r}\circ\vec{e})=c^2\vec{r}^{\,2}-2c^2(\vec{r}\circ\vec{s})$$

Da wir nur die Punkte R suchen, die die Schnittebene E schneiden, bzw. in der xy-Ebene liegen, gilt:

(12) $$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

Setzt man dies und (9) in (11) ein, erhält man

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}e_x\\0\\e_z\end{pmatrix}\right)^2+2c\cdot|\vec{s}|\cdot\left(\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}e_x\\0\\e_z\end{pmatrix}\right)=c^2\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}^2-2c^2\left(\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}s_x\\0\\s_z\end{pmatrix}\right)$$

$$x^2e_x{}^2+2c\cdot|\vec{s}|\cdot xe_x=c^2\left(x^2+y^2\right)-2c^2s_xx$$

$$c^2y^2=x^2e_x{}^2+2c\cdot|\vec{s}|\cdot xe_x+2c^2s_xx-c^2x^2$$

$$c^2y^2=x^2\left(e_x{}^2-c^2\right)+2x\left(c\cdot|\vec{s}|\cdot e_x+c^2s_x\right)$$

(13) $$y^2=2\frac{e_x\cdot|\vec{s}|+cs_x}{c}x-\left(1-\frac{e_x{}^2}{c^2}\right)x^2$$

Gleichung (13) ist die Koordinatenform der Kegelschnitte. Außer c und $|\vec{s}|$ kommen in dieser Gleichung noch e_x und s_x vor. Um diese Werte zu interpretieren betrachten wir folgende Zeichnung:

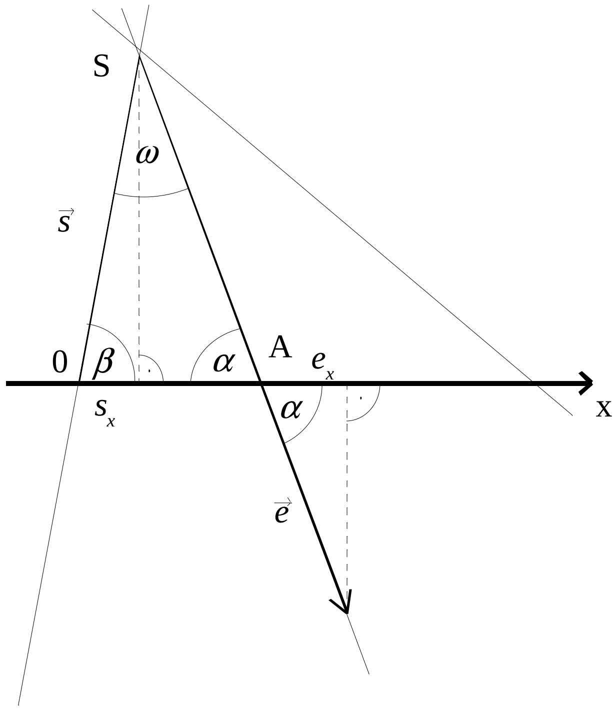

Abb. 3

Hieraus erkennt man:

(14) $$e_x = \cos\alpha$$

(15) $$\frac{s_x}{|\vec{s}|} = \cos\beta$$

Für ω gilt, wie zuvor definiert (2):

$$c = \cos\omega$$

Diese drei Winkel und die Lage von Punkt S sind also ausschlaggebend für den Kegelschnitt. Da sich alle diese charakteristischen Werte im Dreieck 0AS wiederspiegeln, vereinbart man, dieses Dreieck das *charakteristische Dreieck* des Kegelschnitts zu nennen.

Der Einfachheit halber werden einige Größen definiert:

Die *numerische Exzentrität* ε des Kegelschnitts ist die Größe:

$$\varepsilon = \frac{e_x}{c} = \frac{\cos\alpha}{\cos\omega}$$

Der *Parameter p* ist die Größe:

$$p = \frac{e_x \cdot |\vec{s}| + c s_x}{c} = \varepsilon |\vec{s}| + s_x = |\vec{s}|(\varepsilon + \cos\beta)$$

Unter Berücksichtigung dieser Definitionen erhalten wir die allgemeine Gleichung eines Kegelschnitts mit dem Scheitel im Ursprung.

Scheitelform der Kegelschnittsgleichung

(16) $$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$$

2.3 Arten der Kegelschnitte

Um die Kegelschnitte nun genauer zu bestimmen, ist eine Fallunterscheidung notwendig. Überlegen wir uns, welche Schnittformen möglich sind. Steht die Kegelachse senkrecht zur Schnittebene, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entsteht als Schnittfigur ein Kreis. Ist $\omega < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entsteht eine Ellipse. Ist $\omega = \alpha$, also wenn die Schnittebene parallel zu einer Mantelgeraden ist, ergibt sich eine Parabel. Ist $\omega > \alpha > 0$, entsteht eine Hyperbel, die Schnittebene ist zu zwei Mantellinien parallel.

Sonderfälle entstehen, liegt die Kegelspitze in der Schnittebene. In den beiden ersten Fällen, Kreis und Ellipse, werden die Schnittfiguren zu einem Punkt entartet, der Kegelspitze. Die Parabel wird zu einer Geraden entartet, da die Schnittebene nicht mehr nur parallel zu einer Mantelgeraden ist, sondern auf ihr liegt. Im Fall der Hyperbeln entstehen zwei Geraden, da die Schnittebene nicht nur zu zwei Mantellinien parallel ist, sondern den Kegelmantel auch in diesen Mantellinien schneidet.

Dies sind jedoch nur Vermutungen, die keineswegs bereits bewiesen sind. Dies erfolgt in den folgenden Abschnitten.

2.3.1 Gleichung des Kreises und der Parabel in der Scheitelpunktsform

2.3.1.1 Vorüberlegungen

2.3.1.1.1 Herleitung der Scheitelform der Kreisgleichung

Da bei diesen Rechnungen nur Scheitelformen von Schnittgleichungen als Ergebnis erscheinen können, muß man sich überlegen, was die Scheitelform der Kreisgleichung ist.

Die einfachste Kreisgleichung ist die eines Kreises mit dem Mittelpunkt im Ursprung:

$\vec{r}$ sind alle Punkte des Kreises, a der Radius des Kreises.

(17) $$\vec{r}^{\,2} = a^2$$

Betrachten wir die Verschiebung des Mittelpunktes des Kreises um $\vec{r}_M$.

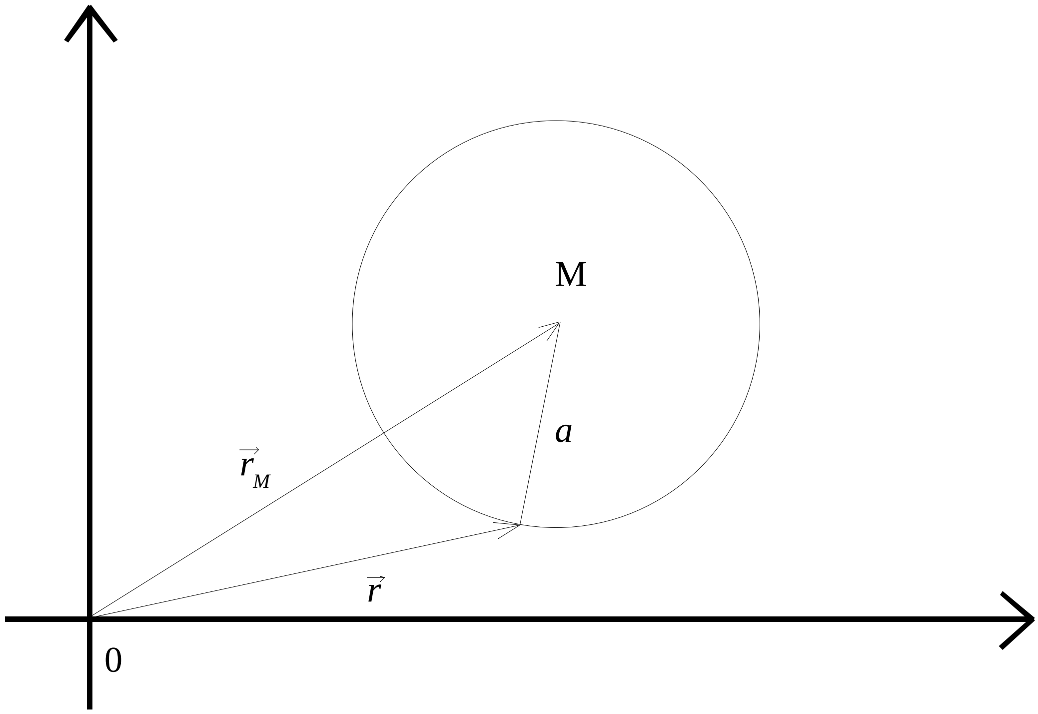

Abb. 4

Aus Abb. 4 ist ersichtlich:

	Verschiebungsform der Kreis-Gleichung
(18)	$\left(\vec{r}-\vec{r}_M\right)^2 = a^2$

Liegt der Ursprung auf dem Kreis, so gilt:

$$\vec{r}_M{}^2 = a^2$$

In (18) eingesetzt erhält man:

	Scheitelform der Kreisgleichung
(19)	$\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r} \circ \vec{r}_M = 0$

2.3.1.2 Die Schnitte

2.3.1.2.1 Der Kreis

Ich vermute, daß ein Kreis als Schnittfigur entsteht, wenn gilt

(20) $$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Daraus folgt:

(21) $$\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\omega} = 0$$

In die Scheitelform der Kegelschnittsgleichung (16) eingesetz ergibt sich:

(22) $$y^2 = 2\left(\varepsilon|\vec{s}| + s_x\right)x - \left(1 - \varepsilon^2\right)x^2$$

(23) $$y^2 = 2s_x x - x^2$$

(24) $$x^2 + y^2 - 2s_x x = 0$$

Da $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (siehe (12); Allerdings ist dieser $\vec{r}$ auf zwei Dimensionen begrenzt. Die z-Dimension wird der Einfachheit halber weggelassen.) und $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} s_x \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich durch die Umkehrung des Skalarproduktes:

Scheitelform der Kreisgleichung (19)
$\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}_M \circ \vec{r} = 0$

Dies ist die Scheitelform der Kreisgleichung. Die Vermutung stimmt.

2.3.1.2.2 Die Parabel

Für die Parabel wurde vermutet, daß sie die Schittform sei, wenn gilt:

(25) $$\omega = \alpha$$

Dann ist

(26) $$\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\omega} = 1$$

In die Scheitelform der Kegelschnittsgleichung (16) eingesetz ergibt sich:

Parabelgleichung

(27) $$y^2 = 2px$$

(28) $$p = |\vec{s}| + s_x = |\vec{s}|(1 + \cos\beta)$$

Vertauscht man x und y, so erhält man die altbekannte Parabelgleichung:

(29) $$y = ax^2 \text{ mit } a = \frac{1}{2p}$$

2.3.2 Gleichung der Ellipse, Hyperbel und des Kreises in der Mittelpunktsform

2.3.2.1 Vorüberlegungen

Um die Gleichungen dieser Objekte zu erkennen, müssen wir sie erst herleiten.

2.3.2.1.1 Herleitung der Mittelpunktsform der Ellipsengleichung

Betrachten wir eine Ellipse als gestauchten Kreis:

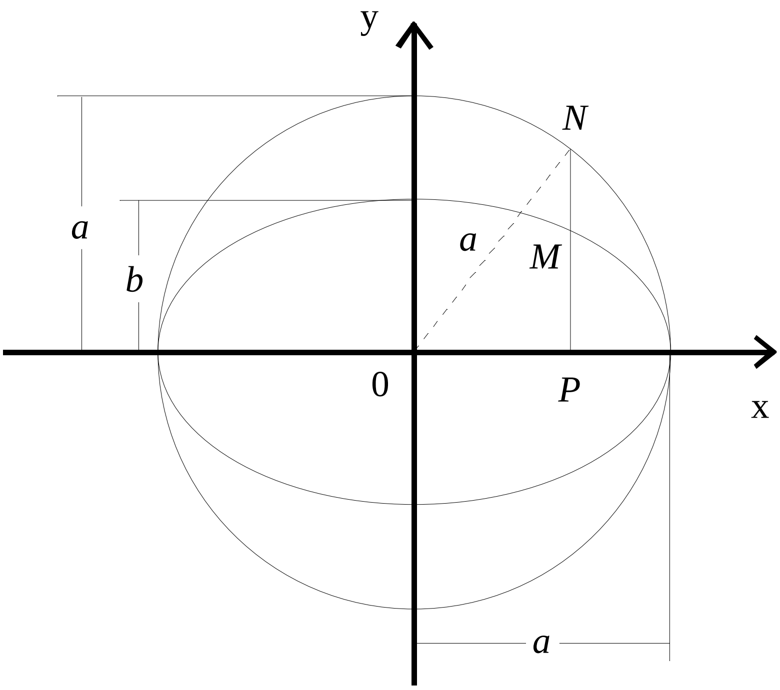

Abb. 5

Hieraus erkennbar ist:

(30) $$\frac{|PM|}{|PN|} = \frac{b}{a}$$

(31) $$|0P|^2 + |PN|^2 = |0N|^2 = a^2$$

Setzt man aufgrund (30),

(32) $$|PN| = \frac{a}{b}|PM|$$

in Gleichung (31) ein, erhält man:

(33) $$|0P|^2 + \frac{a^2}{b^2}|PM|^2 = a^2$$

Da $|0P|$ und $|PM|$ die *x*-, bzw. *y*-Koordinaten eines Punktes M der Ellipse sind, folgt:

Die Mittelpunktsform der Ellipsengleichung

(34) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2.3.2.1.2 Herleitung der Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung

Voraussetzung ist die Definition der Hyperbel:

„Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte (M), deren Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F’ eine Differenz besitzen, die dem Absolutbetrag nach konstant ist.“[1]

(Man bezeichnet F und F’ auch als Brennpunkte.)

(35) $$\left||F'M|-|FM|\right|=2a$$

Der Faktor 2 vor dem a vereinfacht das Ergebnis.

Weiterhin setze ich

(36) $$|FF'|=2c$$

[1]Vgl. hierzu M. J. Wygodski, Höhere Mathematik griffbereit, 2. Auflage, S. 96, 2. Abs. 1.

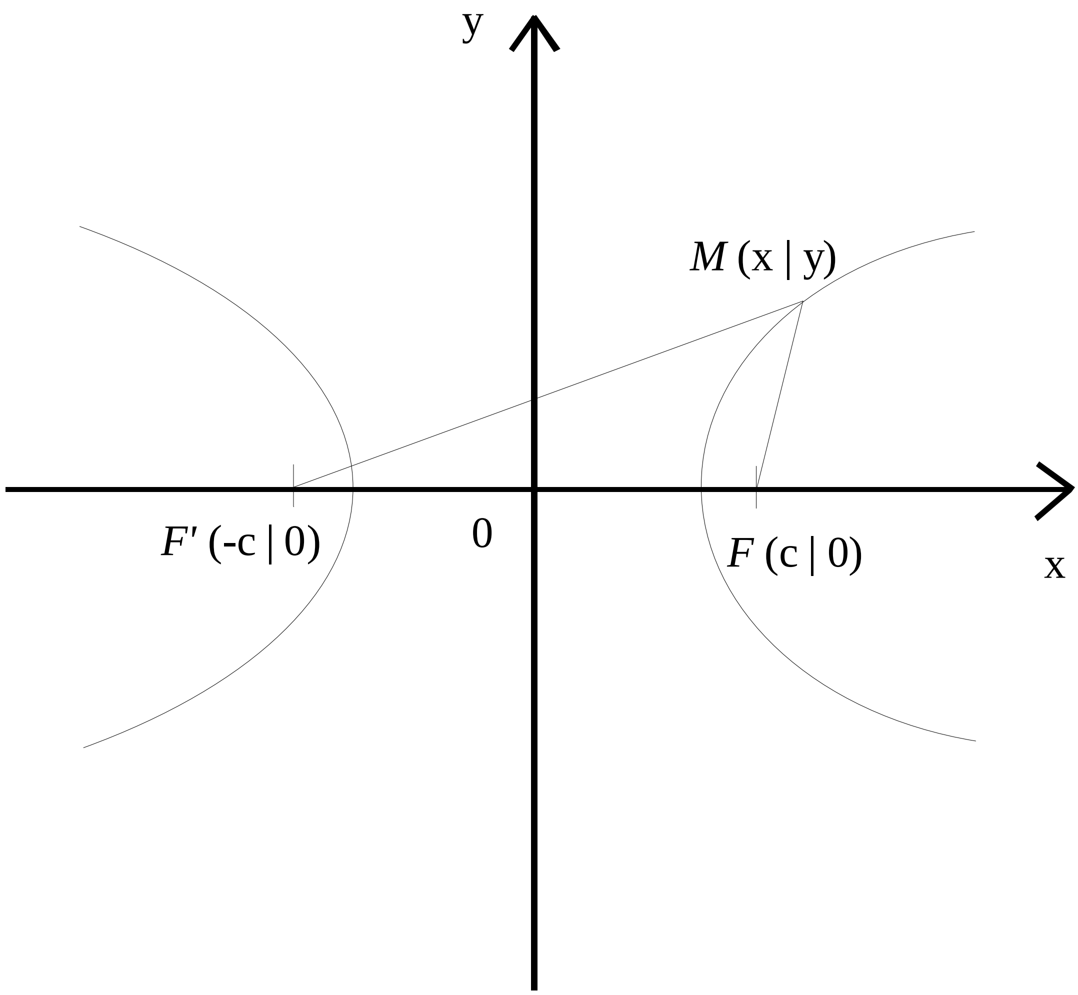

Abb. 6

Wie auch aus der Abbildung ersichtlich, folgt aus (35) und (36):

(37) $$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

Durch Umformungen erhält man:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$(x+c)^2-(x-c)^2-4a^2=\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2+2xc+c^2-x^2+2xc-c^2-4a^2=\pm 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$xc-a^2=\pm a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2x^2-2xca^2+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=\left(a^2-c^2\right)a^2$$

(38) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

a^2-c^2 ist immer negativ. Deshalb setze ich

(39) $$b^2=c^2-a^2$$

und erhalte somit

Die Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung

(40) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Alle Gleichungen dieser Form stellen eine Hyperbel dar.

Anmerkung:

Die bekannte Funktion

$$f(x)=c\cdot\frac{1}{x}$$

beinhaltet nur Hyperbeln, die sich zwei zueinander senkrecht stehenden Geraden annähern. Man erhält sie aus (40), wenn

$$a^2=b^2$$

ist. Zu beachten ist, daß die dargestellten Hyperbeln der beiden Gleichungen zueinander um $\frac{\pi}{4}$ gedreht sind.

2.3.2.1.3 Herleitung der Mittelpunktsform der Kreisgleichung

Mit Hilfe der Definition des Skalarproduktes ergibt sich aus (17):

Die Mittelpunktsform der Kreisgleichung

(41) $$r_x^{\,2} + r_y^{\,2} = a^2$$

2.3.2.2 Die Schnitte

Nach meiner Vermutung entsteht eine Ellipse, wenn $\omega < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Es entsteht eine Hyperbel, wenn $\omega > \alpha > 0$. Es entsteht ein Kreis, wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Diese Kegelschnitte sind achsensymmetrisch zur x-Achse, dies erkennt man auch an der Scheitelform der Kegelschnittsgleichung (16). Ellipse, Hyperbel und Kreis sind generell zu zwei senkrecht zueinander stehenden Achsen symmetrisch. In meinem Fall bedeutet dies, die Schnittfigur Ellipse, bzw. Hyperbel, bzw. Kreis sind auch zu einer Parallelen zur y-Achse symmetrisch, oder auch durch Verschiebung entlang der x-Achse zu der y-Achse symmetrisch.

Der Kegelschnitt wird verschoben um:

(42) $$\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt für die verschobenen Punkte R':

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x' + v_x \\ y' \end{pmatrix}$$

Aus der Scheitelform der Kegelschnittsgleichung (16)

$$y^2 = 2px - \left(1 - \varepsilon^2\right)x^2$$

erhält man:

(43) $$y'^2 = 2p\left(x' + v_x\right) - \left(1 - \varepsilon^2\right)\left(x' + v_x\right)^2$$

$$y'^2 = 2px' + 2pv_x - \left(1 - \varepsilon^2\right)x'^2 - 2v_x\left(1 - \varepsilon^2\right)x' - \left(1 - \varepsilon^2\right)v_x{}^2$$

(44) $$y'^2 = 2\left(p - v_x\left(1 - \varepsilon^2\right)\right)x' - \left(1 - \varepsilon^2\right)x'^2 + 2pv_x - \left(1 - \varepsilon^2\right)v_x{}^2$$

Diese Kurve ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn der Vorfaktor vor dem x' 0 ist, also

(45) $$p - v_x\left(1 - \varepsilon^2\right) = 0$$

(46) $$v_x = \frac{p}{\left(1 - \varepsilon^2\right)}$$

oder auch

(47) $$p = v_x\left(1 - \varepsilon^2\right)$$

In Gleichung (44) eingesetzt ergibt sich:

(48) $$y'^2 = -\left(1 - \varepsilon^2\right)x'^2 + \left(1 - \varepsilon^2\right)v_x{}^2$$

oder umgeformt:

(49) $$\frac{x'^2}{v_x{}^2} + \frac{y'^2}{\left(1 - \varepsilon^2\right)v_x{}^2} = 1$$

2.3.2.2.1 Die Ellipse

(50) $$\omega < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\omega} < 1 \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 > 0$$

Deshalb ist die Schnittgleichung für den Fall, $\omega < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (Die Striche lasse ich jetzt weg, da sie nur andeuten, daß es sich um verschobene Punkte handelt):

Gleichung der Ellipse in der Mittelpunktsform der Ellipse (34)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ mit } a^2=v_x{}^2 \text{ und } b^2=\left(1-\varepsilon^2\right)v_x{}^2$$

Da dies die Gleichung der Ellipse in der Mittelpunktsform ist, ist die Vermutung bestätigt.

2.3.2.2.2 Die Hyperbel

(51) $$\omega>\alpha>0\Rightarrow\varepsilon=\frac{\cos\alpha}{\cos\omega}>1\Rightarrow 1-\varepsilon^2<0$$

Deshalb ist die Schnittgleichung für den Fall, $\omega>\alpha>0$ (Die Striche lasse ich jetzt weg, da sie nur andeuten, daß es sich um verschobene Punkte handelt):

Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung (kanonische Gleichung der Hyperbel) (40)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ mit } a^2=v_x{}^2 \text{ und } b^2=-\left(1-\varepsilon^2\right)v_x{}^2$$

Da dies die Gleichung der Hyperbel in der Mittelpunktsform ist, ist die Vermutung bestätigt.

2.3.2.2.3 Der Kreis

(52) $$\alpha=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\varepsilon=\frac{\cos\alpha}{\cos\omega}=0\Rightarrow 1-\varepsilon^2=1$$

Deshalb ist die Schnittgleichung für den Fall, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (Die Striche lasse ich jetzt weg, da sie nur andeuten, daß es sich um verschobene Punkte handelt):

(53) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ mit } a^2=v_x{}^2 \text{ und } b^2=v_x{}^2$$

Mittelpunktsform der Kreisgleichung (41)

$$x^2+y^2=v_x{}^2$$

Da dies die Gleichung des Kreises in der Mittelpunktsform ist, ist die Vermutung bestätigt.

2.3.2.3 Anmerkung bezüglich der numerischen Exzentrität ε

Da für Ellipse, Kreis (oberes +) und Hyperbel (unteres -) in der Mittelpunktsform gilt:

$$b^2 = \pm\left(1-\varepsilon^2\right){v_x}^2 \text{ und } a^2 = {v_x}^2$$

ist

$$b^2 = \pm\left(1-\varepsilon^2\right)a^2$$

$$\frac{b^2 \mp a^2}{a^2} = \mp\varepsilon^2$$

$$\frac{a^2 \mp b^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

$$\frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{|a|} = \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{|F0|}{|A0|}$$

$$\varepsilon = \frac{|FF'|}{|AA'|}$$

Daher gilt:

(54) $$\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\omega} = \frac{|FF'|}{|AA'|}$$

F und F' sind die Brennpunkte, A und A' die Scheitelpunkte, B und B' die Nebenscheitelpunkte:

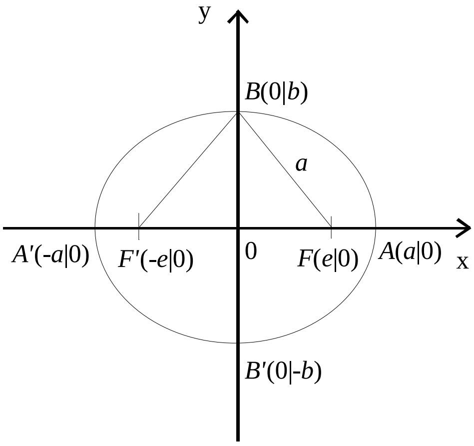

Abb. 7

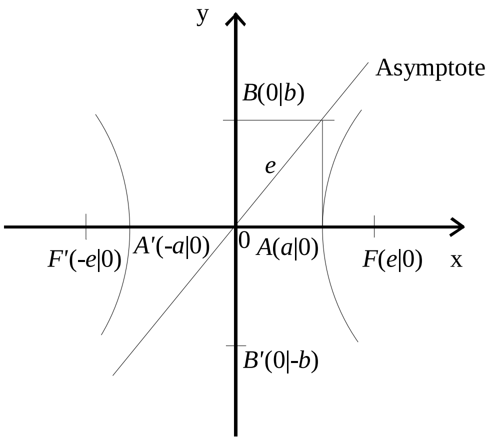

Abb. 8

Die numerische Exzentrität ε ist also nicht nur durch die Winkel des charakteristischen Dreiecks des Kegelschnitts interpretierbar, sondern auch an dem Verhältnis zwischen Streckenlängen in dem zweidimensionalen Schnitt.

2.3.3 Allgemeine Gleichung

Als allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, die zwei Symmetrieachsen besitzen, kann man die Gleichungen (34), (40), (53) zusammenfassen zu:

Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte in der Mittelpunktsform

(55) $$\frac{x^2}{a^2} + \operatorname{sgn}(\alpha - \omega)\frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ mit } a^2 = {v_x}^2 \text{ und } b^2 = \operatorname{sgn}(\alpha - \omega)\left(1 - \varepsilon^2\right){v_x}^2,\ \alpha \neq \omega$$

Diese Gleichung erfaßt nicht den Fall der Parabel, da die Parabel nur eine Symmetrieachse besitzt, es keine Mittelpunktsform der Parabelgleichung gibt und die Einschränkung in der Gleichung (55) den Fall der Parabel ausschließt.

Es gibt aber neben der *Scheitelform der Kegelschnittsgleichung* (16) noch folgende Möglichkeit (Man beachte jedoch, daß für den Fall der Parabel die Scheitelpunktsform herauskommt, sonst die Mittelpunktsform):

Allgemeine Gleichung der Kegelschnitte

(56) $$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \operatorname{sgn}(\alpha - \omega)\frac{y^2}{b^2} = 1, \alpha \neq \omega \\ y^2 = 2px, \alpha = \omega \end{cases}$$, mit $a^2 = {v_x}^2$ und $b^2 = \operatorname{sgn}(\alpha - \omega)(1 - \varepsilon^2){v_x}^2$

Diese Formel hat gegenüber Gleichung (16) den Vorteil, daß man an ihr die Gleichungen der einzelnen Arten der Kegelschnitte erkennen kann. Alle speziellen Formeln der Arten der Kegelschnitte sind aus dieser Formel leicht herleitbar. Diese Formel hat insofern einen praktischen Nutzen für den Anwender.

Benötigt man jedoch eine Formel, die alle Kegelschnitte in sich vereint, hat Gleichung (16) oder auch die Gleichung aus Aufgabe 1 den Vorteil, das die Unterscheidung zwischen Scheitelpunktsform oder Mittelpunktsform nicht notwendig ist.

3 Aufgabenstellung

3.1 Lösung zu Aufgabe 1

(A1.1) $$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Ellipse:

Jede Ellipse in Normalform läßt sich wie folgt darstellen (Mittelpunktsform verschoben entlang der x- bzw. y-Achse):

(A1.2) $$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{(y-e)^2}{b^2} = f$$

Das *f* stellt gegenüber der 1 einen Vergrößerungsfaktor dar.

Ist *f* positiv, so ergibt sich immernoch eine Ellipse, ist *f* jedoch negativ, entsteht keine reell Ellipse, da der linke Term der Gleichung nicht negativ werden kann. Da die Gleichung aber von ihrem Äußeren der Ellipsengleichung ähnelt, nennt man sie die Gleichung einer imaginären Ellipse.

Durch Umformungen von (A1.2) erhält man:

(A1.3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{d}{a^2}x - 2\frac{e}{b^2}x + \frac{d^2}{a^2} + \frac{e^2}{b^2} - f = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Setzt man die entsprechenden Vorfaktoren der einzelnen Glieder der beiden Gleichungen gleich, so erkennt man, daß (A1.1) dann eine Ellipse (reell, imaginär oder Punkt) ergibt, wenn gilt:

$$A \cdot B > 0$$

Kreis:

Durch die zuvor gewonnenen Kenntnisse ergibt sich genau dann ein Kreis (reell, imaginär oder Punkt), wenn gilt:

$$A = B$$

Hyperbel:

Aus der Mittelpunktsform der Hyperbelgleichung erhält man:

(A1.4) $$\frac{(x-d)^2}{a^2} - \frac{(y-e)^2}{b^2} = f$$

und analog zur Ellipse:

(A1.5) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{d}{a^2}x + 2\frac{e}{b^2}x + \frac{d^2}{a^2} - \frac{e^2}{b^2} - f = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Setzt man die entsprechenden Vorfaktoren der einzelnen Glieder der beiden Gleichungen gleich, so erkennt man, daß (A1.1) dann eine Hyperbel ergibt, wenn gilt:

$$A \cdot B < 0$$

Parabel:

Aus der Scheitelform der Parabelgleichung erhält man:

(A1.6) $$x - d = 2p(y-e)^2$$

(A1.7) $$0 \cdot fx^2 + 2pfy^2 - fx - 4pefy + f\left(2pe^2 + d\right) = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Setzt man die entsprechenden Vorfaktoren der einzelnen Glieder der beiden Gleichungen gleich, so erkennt man, daß (A1.1) dann eine Parabel ergibt, wenn gilt:

$A = 0, B \neq 0, D \neq 0$: Parabelachse parallel zur x-Achse

$A \neq 0, B = 0, E \neq 0$: Parabelachse parallel zur y-Achse

Der zweite Fall ist analog zum ersten errechenbar, die x- und y-Werte sind gerade vertauscht.

3.2 Lösung zu Aufgabe 2

Da diese Aufgabe nicht ganz zu meinem Weg, die Kegelschnitte zu bearbeiten paßt, begnüge ich mich mit einer kurzen Lösung.

Gegeben sind von einer Ellipse E ein Nebenscheitel B, ein Brennpunkt F und eine Tangente t.

Konstruktionsbeschreibung:

- Ich spiegle F an t und nenne den erhaltenen Punkt F*

- zeichne eine Gerade g durch F und F*

- nenne Schnittpunkt t, g, H

- Kreis K um H mit Radius $|FB|$

Die Anzahl der Schnittpunkte von K und Thaleskreis von F und B ergibt die Anzahl der Lösungen (0, eine oder zwei). Ich beschreibe im weiteren die Konstruktion mit einem Schnittpunkt M, gibt es einen weiteren, so kann mit ihm analog eine zweite Ellipse konstruiert werden.

- F punktspiegeln an M und nenne den erhaltenen Punkt F’

- zeichne Gerade a durch F und F’

- Kreis O um M mit Radius $|FB|$

- nenne Schnittpunkte O und a, A und A’

- wähle beliebigen Punkt K der Strecke $\overline{FF'}$

- Kreis F0 um F mit Radius $|AK|$

- Kreis F1 um F’ mit Radius $|A'K|$

- nenne Schnittpunkte F0, F1: E0(K), E1(K)

Wiederholt man die letzten vier Schritte mit unterschiedlichem Punkt K, so bilden die Punkte E0(K) und E1(K) die gesuchte Ellipse.

4 Literaturverzeichnis

1. Köhler, Joachim; Höwelmann, Rolf; Krämer, Hardt: Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung. 5. Aufl. Otto Salle Verlag Frankfurt a. M., Hamburg, 1968
2. Löffler, Eugen. Der Mathematikunterricht: Beiträge zu seiner wissenschaftlichen und methodischen Gestaltung. Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1956
3. Reidt-Wolff. Die Elemente der Mathematik: Analytische Geometrie, Vektorrechnung, darstellende und projektive Geometrie, spährische Trigonometrie, Oberstufe-Band 4. Ferdinand Schöningh Verlag, Paderborn, Hermann Schroedel Verlag K. G. Hannover, 1953
4. Sieber, H.: Mathematisches Tafelwerk. Ernst Klett Verlag Stuttgart, 1970
5. Staude, Jakob: Hale Bopp. Kometen-Special, in: Sterne und Weltraum. Zeitschrift für Astronomie, März/April 1997
6. Wygodsky, M. J.: Höhere Mathematik griffbereit. 2. Aufl. Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig, 1977